

Formelsammlung (Sd)

mit den Seiten

Mittelstufe (ohne Abivorbereitung): 957, 2-16, 380-381, 869-874, 940

Oberstufe (mit Abivorbereitung): 957, 2-16, 380-381, 869-939, 940

Die Seiten des Oberstufenanhangs sind: 869-938

Wettbewerbe:

Mitte November: Informatik Biber, Kl 8-12;

Anfang Dezember: Mathe im Advent, Kl 8-10;

Ende Februar: Pangea, Kl 8-12;

Ende Oktober: Landeswettbewerb, Kl 9+10;

1. Dezember - März: Bundeswettbewerb, Kl 10-12;

Anfang Februar: Mathe ohne Grenzen, Kl 9+10;

Mitte März: Mathe Känguru, Kl 8-12;



Die Filme finden Sie auf den Kanälen 'Mathe Schmid' oder 'Schmid happens'.

Mein Buch und auch die alle Lösungsvorschläge finden Sie auf meinem Internetauftritt: Sd.SLT.biz bei den jeweiligen Klassen. User Schueler, Pass erfragen Sie unter Sd@SLT.biz. Dort erhalten Sie auch ein Token für die online-Version von Hurra Mathe: Mobile Mathe.

Alle meine Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz.

$M+1$	3.1	Algebra	Komplexe Zahlen	47
$M+2$	6.3.11	Analysis	Die Regel von de l'Hospital	166
$M+3$	7.1.18	Integrale	Regeln der Integralrechnung	179
$M+4$	8.2	Dgln	Taylor und Differenzialgleichungen	196
M-AG ₁	4.4	Folgen	Vollständige Induktion ($M+0$)	68
M-AG ₂	4.5	divers	Vorbereitung auf Wettbewerbe	69
BA 2 ₈	12.4	Wth	beinahe Binomialverteilungen	336
BA 3 ₂	13.3	Wth	Statistik	351

1 Einleitung

Willkommen!

Mathematik macht Spaß + glücklich! Mathematik steckt in mir (und Dir) und muss heraus.
Bedenke aber: Beglückenderer, als Mathematik zu machen, ist es, Mathematik zu lehren.

Zum Geleit: *Hurra Mathematik* besteht aus zwei Teilen: Einem Schulteil, der im Großen und Ganzen aus Aufgaben besteht und einem Hochschulteil welcher den Stoff noch einmal auf höherem Niveau wiedergibt. Der Unterrichtsteil zeigt meinen Unterricht der Klassen 8-12. Oft entspricht ein Unterpunkt etwa 1-2 Unterrichtsstunden. Die erwarteten Schülerlösungen zu fast allen Aufgaben finden Sie auf meiner Internetseite sd.slt.biz oder hm.slt.biz User: Schueler. Das Passwort kann bei mir erfragt werden. Bitte beachten Sie dabei die Version; die Aufgabennummern können sich laufend ändern. Sollte bei einer Aufgabe eine Längeneinheit fehlen, so ist für diese *cm* zu wählen. Der Platz im Buch ist knapp (max. 398 Seiten), deshalb bitte ich die dichte Darstellung (Balkenform / wenig Absätze) zu entschuldigen. Eine übersichtlichere Version (Thx Alice .. mit gleichen AgNr + anderen Seitenzahlen) oder einen Zugang (Token) zur Online-Version 'Mobile Mathe' mit Aufgaben, LöVo + Filmlinks gibt es auf Anfrage.

Der Bezug zu den eingeführten Lehrwerken: Als ich mich wieder einmal über die Bücher der Mittelstufe beschwert habe, sagte mein Kollege Froberg: 'Wieso? Mit diesen Büchern können die Schüler sehr gut *zu Hause* lernen'. Es dauerte etwas, bis ich begriff, dass die Bücher zur Eigenarbeit gedacht sind und nicht (unbedingt) zum Unterrichten. Deshalb arbeiten wir in der Schule allein mit *Hurra Mathematik* und die Schüler sollen zu Hause den Unterrichtsstoff mit den Schulbüchern und meinen Aufgabensammlungen weiter vertiefen. Den Bezug zu den eingeführten Schulbüchern finden Sie am Anfang vieler Abschnitte:

Klasse 8,9:	Neue Wege 4,5, 2007	(=NW4, NW5),
Klasse 8,9,10:	Lambacher Schweizer 8,9,10, 2017	(=LS8 .. LS10),
Klasse 10:	Elemente der Mathematik 6, 2009	(=EM6),
oder Klasse 10:	Lambacher Schweizer 11, 1998	(=LS11),
Klassen 10-12:	Lambacher Schweizer Kursstufe, 'Jahr'	(=KS _{Jahr}),



Was macht Lewandowski den ganzen Tag? Und hat er das nötig?

Folgende Taschenrechner sind Basis der LöVo des Buches: GTR: Texas TI 83; **WTR:** Casio fx-87DEX

Binnendifferenzierung (BD): (thx Trl) BD bezeichnet die individuelle Förderung Einzelner innerhalb einer Lerngruppe. BD kann nur im offenen Unterricht wirkungsvoll praktiziert werden. Also ist es beim lehrerzentrierten Unterricht sinnvoll, diese in die Hausaufgaben zu verlegen. Deshalb finden Sie bei fast allen Aufgaben Indizes, Bsp: c_2). Die Nr. sagt etwas über deren Niveaustufe aus: $1+2$ =Basisniveau (bis Note 3-4; 6 NP), $3+4$ =Könnerniveau (bis Note 1-2, 12 NP), $5(+6)$ =Profiniiveau. Bitte beachten Sie dabei, dass für die Niveaustufe nicht nur relevant ist, *was* gefragt wird, sondern auch *wann* es gefragt wird. Die Minimalanforderungen sind immer auf Niveau 1-2. Sonder-niveau sind *a*=Algorithmus, *b*=Beispiel, *e*=Einführung, *L*=nur LK, *r*=Regel, und *w*= Wiederholung (Niveau *b* und *r* müssen als HA ins Regelheft (s.u.) übertragen werden). Eine Niveaunkretisierung bei Einführungsaufgaben ist schwierig, denn die Agstellungen sind eher leicht, es wird aber ein Transfer erwartet.

Das Regelheft: (thx Lor, Wg) Sie sollten ein Regelheft (als Hausheft) führen. Im Regelheft sollten alle wichtigen Formeln, sowie Regeln und Algorithmen des Unterrichtes kompakt, evtl. mit einem Beispiel, notiert sein. Sollte eine Aufgabe (idR Lückentext) den Niveauinters *r* haben, so schreiben

Sie die ausgefüllte Variante als Hausaufgabe in Ihr Regelheft ab. Eine Aufgabe mit Index 'b' sollte im Unterricht gerechnet werden; die Lösung dieser Aufgabe (eventuell mit Aufgabentext) gehört zu einer Regel und ist ebenfalls ins Regelheft zu übertragen. Außerdem sollten Sie in das Regelheft alle Formeln der Formelsammlung abschreiben, die während des Unterrichtes besprochen wurden. Im Gegensatz zum Regelheft ist das Schulheft ein Arbeitsheft und darf (soll) auch falsche Ansätze oder Durchgestrichenes enthalten. Hausaufgaben und Übungsaufgaben gehören ins Schulheft.

Hausaufgabe sind grundsätzlich alle im Unterricht ausgelassenen Aufgaben. Faustregel: Ein Schüler mit Note n sollte (mindestens) n Aufgaben (pro Unterrichtsstunde) als Hausaufgabe machen (auch wenn dies nicht kontrolliert wird). Eine Aufgabe mit Markierung $\boxed{f_2}$ muss von jedem Schüler als HA präsentabel vorbereitet werden, denn ein zufällig ausgewählter Schüler wird sie dann (in der Regel) in der nächsten Stunde unter der Dokumentenkamera präsentieren. Ag mit \textcircled{a}_2 (auch (f) (U) oder Index 'f') sind gefilmt worden (Youtube Kanäle Mathe Schmid + Schmid happens). Zu allen Aufgaben gibt es Lösungsvorschläge im Netz; diese sollten aber erst konsultiert werden, wenn Sie einige Zeit erfolglos versucht haben, die Aufgabe zu bearbeiten. Damit entfällt auch die Ausrede: 'Ich konnte die Hausaufgabe nicht machen, weil ich diese nicht verstanden habe'. Sollten Sie (trotz auswendig gelernter Formeln) einmal eine Aufgabe (Ihres Niveaus) nicht herausbekommen, gehen Sie wie folgt vor:

- 1) Schreiben Sie die Lösungsvorschläge ab.
- 2) Mailen Sie an Sd@slt.biz die Aufgabe - ich versuche dann die LöVo zu ergänzen; (goto 1).
- 3) Erwirken Sie über den Kursprecher im Unterricht eine Besprechung der Aufgabe (bis Niveau 3). Bitte melden Sie mathematische Fehler und auch Rechtschreibfehler sofort (per Mail).

Was wir zu Schülern sagen...



Im Falle des **Onlineunterrichts** beginnen wir zur gleichen Zeit wie beim Präsenzunterricht unter stream.slt.biz. Den Plan des Tages finden Sie dann unter 'Klasse'.slt.biz. Ein Thema besteht aus einem Film, einer Aufgabe, die in Kleingruppen (Breakoutrooms Raum n .slt.biz) bearbeitet werden soll und einer anschließenden Besprechung (in der Regel mit Aufzeichnung). Alle Projekte finden Sie unter mathe.slt.biz Bitte geben Sie die HA (LöVo online) spätestens 48 Stunden vor den Meetings eigenhändig handschriftlich als jpg mit dem Datei-Namen [Klasse]-[Nummer]-[Name].jpg per Mail ab. Als Schüler der Klasse 10k gibt Max Müller die HA des Meetings Nr 3 die Datei namens 10k_03_Mueller.jpg ab. Bei Studenten entfällt die Klasse. Bitte schauen Sie sich alle Filme auch die ohne HA bis zum Ende an und kommentieren Sie diese (wenn erwartet) mit Ihrem Vornamen.

Notentransparenz: Im Regelfall schreibe ich pro Halbjahr 1 bis 3 Tests (diese zählen einfach \rightarrow Heft) und 2 KA (diese zählen doppelt). Wer wiederholt bei einem Test oder einer KA oder bei der letzten KA fehlt, muss damit rechnen, diese (oder diesen) während der nächsten Unterrichtsstunde nachschreiben zu müssen. Die mündliche Leistung werte ich wie einen Test. Diese Note kann durch einen Vortrag bzw. GFS aufgewertet werden. Mit der letzten Arbeit jedes Halbjahres können Sie einen Papier-Streifen mit Ihren bisherigen Leistungen erhalten. Das Erstellen dieses Streifen kann den Datenschutz leicht verletzen. Bitte melden Sie rechtzeitig, wenn Sie sich vor diesen Daten schützen wollen also keinen Streifen wünschen. Wenn Sie einen Streifen haben, können Sie sich in meiner Sprechstunde (nicht im Unterricht - zusammen mit Ihrer besten Freundin) zur erteilten Note äußern. Goto 384/3a+4a.

Zwillingsaufgaben (markiert durch einen Index Z) kommen verstärkt ab der Version 6.8 vor und sind Textaufgaben, die neben der eigentlichen Mathematik noch ein kleines Rätsel beinhalten. Gesucht ist meist eine Person (oft mit einem verfremdeten Namen oder anderem Geschlecht), eine Erzählung oder ein Ereignis; die Lösung wird im Unterricht nicht besprochen und kann in den LöVo auf Sd.SLT.biz nachgeschlagen werden. Aufgaben mit Index 'g' haben einen geschichtlichen Bezug. Goto 16/1.3

Is nich gibts nicht: Grundsätzlich findet jeder Unterricht (auch das Tutorium) statt, selbst wenn auf dem Vertretungsplan 'Entfall' steht. In der Regel werde ich dann von einem Schüler vertreten (SZU), der mit Ihnen Übungsaufgaben oder KA Besprechungen macht.



1.1 Formelsammlung

Matheformeln auswendig lernen - ist in Mathe nicht viel mehr das Verständnis entscheidend? Man muss doch nicht wissen wie's geht sondern nur wissen wo's steht. **NEIN!** Entscheidend ist, dass man überhaupt weiß, wofür es eine Formel gibt und durch die Formeln Zusammenhänge erst klar werden. Wissen Sie, was die Formel $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ bedeutet? Nein? Aber Sie wissen, dass diese Formel von Formel 29 abstammt, und damit haben Sie schon einen Großteil verstanden. Und Formeln geben Ihnen die Sicherheit in einer Prüfung das Richtige zu tun. Übrigens: Bei einer Sprache verzichten Sie auch nicht aufs Vokabeln lernen, wenn Sie doch ein Wörterbuch haben ☺.

Bitte beachten Sie, dass sowohl die Formelsammlung als auch die Minimalanforderungen (am Ende jeder Unterrichtseinheit) nur als Basis für die weiteren Kapitel zu verstehen sind. Eine KA Vorbereitung sollte weit mehr beinhalten. Besonders relevant zur KA Vorbereitung (für den Reproduktionsteil) sind Aufgaben mit der Markierung (KA_X) ($X \in \{\text{'B'asis, 'l'okal, 'G'lobal, 'Z'entral}\}$; optional bis zur Markierung ($\overline{\text{KA}}$)). Und denken Sie immer dran: Wenn Sie in einer KA nur Falsches hinschreiben, gibt es 0 Punkte, wenn Sie aber nichts hinschreiben, werden es auch nicht mehr (falsch \geq nichts).

Merkwürdig wenn Sie das Wort hören, denken Sie an sonderbar skurril - im eigentlichen Sinne bedeutet es aber es ist würdig, es sich zu merken. Wenn Sie Information mit einem durchaus merkwürdigen Bild kombinieren, so können Sie sich diese oft viel besser merken. Ziel ist es, jede Formel mit einem merkwürdigen erklärenden Bild zu versehen. Vorschläge sind willkommen (zB Formel 11).

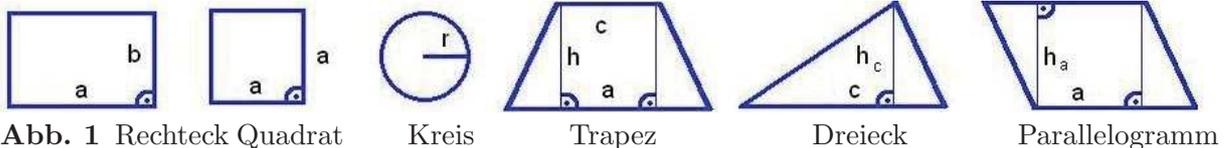
Folgende Formeln sind unbedingt auswendig zu lernen; (W) bedeutet dabei 'wichtig'; (A) 'auswendig'; (Z) 'zentral'. Zentrale Formeln sind praktisch Voraussetzung für jede Unterrichtseinheit. Die Formelsammlung ist nicht unbedingt vollständig. Weitere Formeln dürfen gerne auch gelernt werden. Taucht im Aufgabentext der Hinweis (**Formel 1**) auf, so wird die Formel 1 an dieser Stelle eingeführt. Weitere Erwähnungen sind mit F1 gekennzeichnet. Vielen Dank an Familie Tressel und allen Formelsammlern für die Mithilfe.

1.1.1 Formelsammlung bis Klasse 7

- (A) Die ersten 20 Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400; $25^2 = 625$; Kubikzahlen: $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$.
(A) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl >1 , die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die ersten acht Primzahlen sind 2,3,5,7,11,13,17,19.

- (A) Ein Term ist immer nach der Verknüpfung benannt, die als letztes ausgeführt wird.
- (Z) Seien $a, b, c \in \mathbf{R}$, dann gilt das Kommutativgesetz $a + b = b + a$,
das Assoziativgesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$ und das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

- (A) Bei einem Kreis mit Radius r gilt: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$, $A = \pi \cdot r^2$.



- (A) Flächenberechnung von Dreiecken bzw. Vierecken:

Quadrat:	$A = a^2$,	
Rechteck:	$A = a \cdot b$	Länge mal Breite,
Parallelogramm:	$A = g \cdot h$	Grundseite mal Höhe,
Dreieck:	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	Grundseite mal Höhe durch zwei,
Trapez:	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	mit $a \parallel c$ und Höhe h .

6. (A, Ag 57/135) (Vermehrter / verminderter Grundwert) Ein Bestand wächst mit p Prozent pro Zeitschritt, dann gilt für den Wachstumsfaktor q : $q = 1 + \frac{p}{100}$.
7. (W) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1.
8. (W) $a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = \text{größter gemeinsamer Teiler} \cdot \text{kleinstes gemeinsames Vielfaches}$.
9. (W) 'Der kleine Gauß:' $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2+n}{2}$;
10. (Z) Die Steigung m einer Geraden durch $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ berechnen wir mit

$$\text{Zwei-Punkte-Formel (ZPF): } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Angela Merkel [m] fährt auf ihren Ski [=] den Berg hoch gegen ein Haus, das zu Bruch geht. Im oberen Stockwerk der Ruine [Bruch] wirft ein Sektglas, das mit Schwanenblut [y₂] gefüllt ist einen Speer [-] auf ein anderes Sektglas und trifft dessen Kerze [y₁]. Im unteren Stockwerk wird ein Andreaskreuz vom Schwanenblut [x₂] betropft der Speer [-] fällt auf ein anderes Andreaskreuz, welches die mit Glück die Kerze auffängt [x₁].

11. (Z) Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung m durch $P(x_1; y_1)$ ist

$$\text{Punkt-Steigungs-Form (PSF): } y = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Ein Sektglas [y] steht auf zwei Skiern [=] und fährt einen Berg hinauf. Oben steht Angela Merkel [m] mit einem roten Muttermal [·] am Bein. Sie öffnet eine Türe [()] und man sieht eine Straßenkreuzung [x]. Ein Speer [-] fliegt mitten in eine andere Kreuzung hinein und trifft dort eine Kerze [x₁]. Vom Luftzug wird die Türe wieder zugeschlagen [)]. Draußen findet eine Party statt auf der Spaten [+] tanzt. Alle Partygäste haben in der rechten Hand ein Sektglas und in der linken Hand eine Kerze [y₁].

Die x -Achse hat die Gleichung $y = 0$, die y -Achse: $x = 0$.

1.1.2 Formelsammlung Klasse 8

12. (Z, Ag 20/5) Binomische Formeln: **i)** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; **ii)** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
iii) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$; (W, Ag 20/6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
13. (Z, Ag 21/11) Bei Äquivalenzumformungen sind die Multiplikation mit 0 sowie die Division durch 0 und durch x (Tipp: Ausklammern + F14) verboten.
14. (Z, Ag 22/16) Satz vom Nullprodukt: Sei $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.
15. (W, Abs 224/9.2.4) Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k wird aus einer Fläche mit dem Inhalt A eine Fläche mit dem Inhalt $k^2 \cdot A$ (aus einem Körper mit Volumen V ein Körper mit Volumen $k^3 \cdot V$).
16. (A, Ag 225/557) Der (zweite) Strahlensatz: Seien Z, A, B und Z, A', B' je auf einer Geraden (oder kollinear), $A'A \parallel B'B$, dann gilt: $k = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB} = \frac{A'B'}{AB}$. k ist dabei der Streckfaktor der zentrischen Streckung, die das ΔZAB auf das $\Delta ZA'B'$ abbildet.

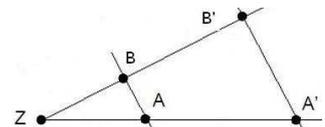


Abb. 2 Strahlensatzfig.

17. (A, Ag 27/37) Sei $n \geq 0$, \sqrt{n} ist diejenige positive Zahl, die quadriert $= n$ ergibt. $x^2 = n$ wird von $x = \pm\sqrt{n}$ gelöst. Damit ist $(\sqrt{n})^2 = n$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.
18. (A, Ag 28/45) Seien $a, b \geq 0$, $n > 0$ dann gilt: **i)** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; **ii)** $\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$;

19. (W, Ag 90/216) Für den Scheitel $S(x_s; y_s)$ einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) gilt: $x_s = \frac{-b}{2a}$.
Die Scheitelform der Parabel ist: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$.

20. (A, Ag 314/796) Gegeben sei ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit zugehörigem Baum.

Die Pfadregel:

In einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert: Die 'Malrichtung' ist von links nach rechts.

Der spezielle Additionssatz:

Die einzelnen Ergebnisse eines Ereignisses dürfen addiert werden: Die 'Plusrichtung' ist von oben nach unten.

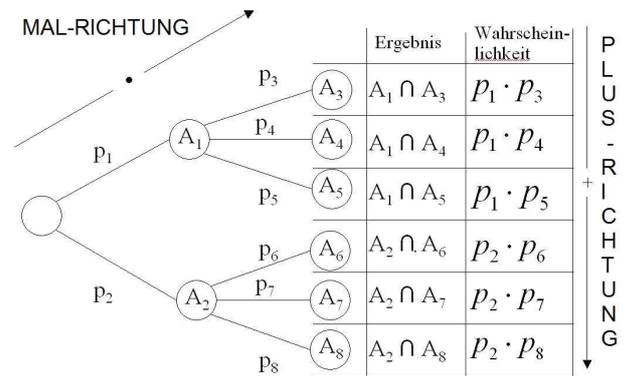


Abb. 3 Pfadregel

21. (Z, Ag 29/56) Mitternachtsformel: Seien $a \neq 0$, $D := b^2 - 4ac \geq 0$ (Diskriminante) dann gilt

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(W, Ag 30/59) Wenn $D > 0$ ist, hat $ax^2 + bx + c = 0$ zwei (verschiedene) Lösungen, bei $D = 0$ hat sie (genau) eine Lösung und bei $D < 0$ hat sie keine Lösung.

22. (A, Ag 30/61) **Linearfaktorzerlegung:** Hat $p(x) = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen x_1 und x_2 , dann ist $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$;
(W, Ag 30/65) **Satz von Vieta:** $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$.

1.1.3 Formelsammlung Klasse 9

23. (A, Abs 34/2.3.2) Seien $a, b > 0, n, m \in \mathbb{R}$, dann gilt:
 1 PG $a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$ 2 PG $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$
 3 PG $(a^n)^m = a^{n \cdot m}; (a^n)^m = (a^m)^n;$ 4 PG $a^{-n} = \frac{1}{a^n};$
 5 PG $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$ 6 PG $a^n \cdot b^m$ kann nicht zusammengefasst werden
24. (A, Ag 35/94) Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n genau eine Lösung $x = \sqrt[n]{a}$; falls n gerade ist, so hat die Gleichung für $a < 0$ keine Lösung, für $a > 0$ gilt $x = \pm \sqrt[n]{a}$ und für $a = 0$ ist $x = 0$.

25. (W, Abs 220/9.1) Wenn zwei Dreiecke in
 (sss) allen drei Seiten
 (sws) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
 (wsw) einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln
 (Ssw) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel
 übereinstimmen, dann sind sie kongruent (deckungsgleich).

Jede der oben angegebenen Kombinationen legt ein Dreieck in Form und Größe eindeutig fest (thx Cf).

26. (A, Abs 36/2.4.1) Seien $a, b > 0, a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a} (= \frac{\ln b}{\ln a}) = \log_a(b)$.
 Insbesondere ist $\log(10^c) = c$ (für alle $c \in \mathbb{R}$) und $10^{\log(c)} = c$ (nur für $c > 0$) (thx Trs).
 (W) Spezielle Werte: $\log(1) = 0, \log(10) = 1, \log(100) = 2, \log(1000) = 3,$ usw.
 (*) Limites: $\log(0) = -\infty, \log(\infty) = \infty,$ (Klasse 11: $\ln(e) = 1$).

27. (A, Abs 37/2.4.2) Seien $a, b > 0, n \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- 1 LogG $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$; $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;
 2 LogG $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$; 3 LogG $\log(a + b)$ kann iA nicht vereinfacht werden.

28. (A, Ag 229/578) $y = m_1 \cdot x + c_1$ und $y = m_2 \cdot x + c_2$ sind orthogonal $\Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$.
29. (Z, Ag 229/582) Der Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck A, B, C mit $\gamma = 90^\circ$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$ oder die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.
 (W, auch Ag 232/600) Die Zahlen (3;4;5) (und entsprechende Vielfache) bilden ein pythagoreisches Tripel, d.h. es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3; 4 und 5. Es hat die weiteren Winkel 36.87° und 53.13° . Die Zahlen 1;2;2;3 bilden ein pythagoreisches Quadrupel, d.h. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ oder ein Quader mit den Seitenlängen 1;2;2 hat Diagonale 3.
30. (W, Ag 230/588) Die Diagonale d eines Quadrates mit der Seitenlänge a ist $d = a\sqrt{2}$.
 Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
31. (A, Ag 231/592) Die Pkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ haben den Abstand $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
 (W, Ag 231/594) Jeder Punkt $P(x; y)$ eines Kreises K um $M(m_1; m_2)$ mit Radius r erfüllt die Gleichung $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 = r^2$ falls $M(0; 0)$.
32. (A, Ag 232/600) Die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 Die Raumdiagonale d_R eines Quaders (Seitenlängen a, b, c) ist $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
33. (W, Ag 97/239) $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ (sofern $f^{-1}(x)$ existiert).
34. (Z, Ag 235/612) Im rechtwinkligen Dreieck gilt (Regel: GAGA HühnerHof AG)
 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$;
 Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
35. (W, Ag 235/616) (auch Ag 109/281) Winkel - spezielle Werte:
- | | | | | | | | | | | | |
|----------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|----------------|-----------|-----------------------|-----------------------|---------------|------------|
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\sin(\alpha)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ | $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
36. (W, Ag 236/618) (auch Ag 112/290) Sinus und Kosinus sind 360° periodisch:
 Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ und $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$.
 Eine Gleichung der Form $\sin(x) = a$ wird von $x_1 = \sin^{-1}(a)$ und $x_2 = 180^\circ - x_1$ gelöst.
 Eine Gleichung der Form $\cos(x) = a$ wird von $x_1 = \cos^{-1}(a)$ und $x_2 = 360^\circ - x_1$ gelöst.
 In diesem Abschnitt sind A, B beliebige Ereignisse.
37. (W, Ag 316/804) Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
38. (W, Ag 317/807) Eine Zufallsgröße \mathcal{X} ist ein Wkraum mit reellen Ergebnissen; hier x_1, \dots, x_n .
 Den Erwartungswert berechnen wir mit: $E = x_1 \cdot P(\mathcal{X} = x_1) + x_2 \cdot P(\mathcal{X} = x_2) + x_3 \cdot P(\mathcal{X} = x_3)$.
39. (W, Ag 319/816) Def. bedingte Wk: $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 (W, Ag 321/818) A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
40. (W, Ag 323/824) Man muss mindestens $\lceil \frac{\log(1-p)}{\log(1-p_0)} \rceil$ mal ein Experiment mit Erfolgswk p durchführen um mit einer Wk von mind. p_0 ein Mal oder öfter erfolgreich zu sein.
41. (A, Ag 238/630) Die Fläche A eines Kreissektors mit Öffnungswinkel α ist $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$,
 die Bogenlänge b ist $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$.
42. (A, Ag 239/637) Für Prismen und zylinderförmige Körper (Säulen) mit Grundfläche G gilt $V = G \cdot h$, für kegelförmige Körper gilt $V = \frac{G \cdot h}{3}$. Für Kugeln gilt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$; $O = 4\pi \cdot r^2$.

1.1.4 Formelsammlung Klasse 10

43. (A, Ag 101/254) $f(x - a)$ bedeutet 'statt x schreibe $(x - a)$ '.
 Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x \rightarrow f(x - a) = 2(x - a)^2 - 4(x - a)$.
 (W, Ag 101/254) Wenn das Schaubild von f um a nach rechts und um b nach oben verschoben werden soll, so hat der resultierende Graph die Funktionsdarstellung $y = f(x - a) + b$.
 (W, Ag 102/256) Soll K_f an der x -Achse gespiegelt werden, so gilt $f_{neu}(x) = -f(x)$; wenn K_f an der y -Achse gespiegelt wird, so gilt $f_{neu}(x) = f(-x)$;
44. (A, Ag 104/262) Die Vielfachheit von Nullstellen (siehe Abb. 4). Einfache Nullstellen x_0 treten als Linearfaktor $(x - x_0)^1$ doppelte Nst als $(x - x_0)^2$ und dreifache Nst als $(x - x_0)^3$ in der Linearfaktorzerlegung auf.
45. (W, Ag 106/269) **Fundamentalsatz** der Algebra: Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Eine ganzrat. Fktn ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

Satz der Linearfaktorzerlegung: $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ ist durch $(x - x_0)$ teilbar.

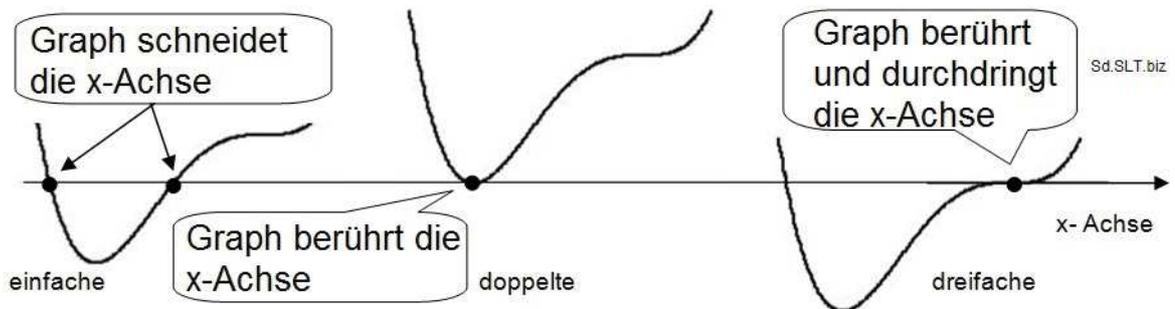


Abb. 4 Vielfachheit von Nullstellen

46. (A, Ag 108/276) Formel der speziellen Symmetrie: Sei f eine Funktion, mit Schaubild K_f .
 K_f ist achsensymmetrisch zur y -Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$; (gerade Funktion);
 K_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$; (ungerade Funktion).
47. (A, Ag 324/12.3.1) $0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.
 Das n -Tupel $\underbrace{E, \dots, E}_k \underbrace{\bar{E}, \dots, \bar{E}}_{n-k}$ kann auf $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ Weisen angeordnet werden.
 Das Tupel $\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1} \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2} \underbrace{3, \dots, 3}_{n_3} \underbrace{4, \dots, 4}_{n_4}$ kann auf $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}$ Weisen angeordnet werden.
48. (W, Ag 328/840) Wir ziehen k aus n Kugeln, dann gilt für die Anzahl der möglichen
- | | | |
|---|--------------------|---|
| Permutationen: (das Quadrat) | mit Zurücklegen | ohne Zurücklegen (Tupel) |
| mit Berücksichtigung der Anordnung (Baum) | n^k | $\frac{n!}{(n-k)!}$ |
| ohne Berücksichtigung der Anordnung | $\binom{n-1+k}{k}$ | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ |
49. (W, Ag 330/846) Ein Experiment mit den Ergebnissen Erfolg und Misserfolg und gleichbleibender Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt Bernoulliexperiment. Dieses wird n mal durchgeführt. Sei \mathcal{X} die Anzahl der Erfolge, dann gilt die Formel von Bernoulli: $P(\mathcal{X} = k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
 $[= \text{binompdf}(n, p, k)]$. \mathcal{X} heißt dann $B_{n,p}$ verteilt oder $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$.
50. (A, Ag 332/852) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, d.g.: $P(\mathcal{X} \geq k) = 1 - P(\mathcal{X} \leq k-1) [= 1 - \text{binomcdf}(n, p, k-1)]$.
51. (A, Ag 333/856) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: Der Erwartungswert von \mathcal{X} ist $E(\mathcal{X}) = \mu = n \cdot p$,
 $V(\mathcal{X}) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$ ist die Varianz und $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ ist die Standardabweichung.

52. (W, Ag 334/858) Sei $\mathcal{X} \sim B_{n,p}$, dann gilt: $P(\mathcal{X} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot p + 0.5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$.
53. (W, Ag 137/324) $\infty \notin \mathbf{R}$, sei $a \in \mathbf{R}$ $a \pm \infty = \pm\infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ \text{undefiniert} & (a = 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$; undefiniert sind $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty$
54. (W, Ag 138/329) Die mittlere Geschwindigkeit (Änderungsrate) oder **Sekantensteigung** einer Weg/Zeitfunktion f zwischen x_0 und x_1 ist $\bar{v} = m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (**Differenzenquotient**). Die Momentangeschwindigkeit (**Tangentensteigung**) einer Weg/Zeitfunktion f ist $v(x_0) = m(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (**Differenzialquotient**).
55. (W, Ag 140/338) Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Steigungswinkel ihrer Tangente: $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$ bzw. falls $f(x) = mx + c$ gilt $\alpha = \tan^{-1}(m)$.
56. (Z, Ag 139/332) Die Potenzregel der Ableitung: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, für alle $n \in \mathbf{R}$.
57. (A, Ag 140/334) Die Linearität der Ableitung: $(r \cdot f(x) + s \cdot g(x))' = r \cdot f'(x) + s \cdot g'(x)$.
58. (A, Abs 140/6.1.7) Tangente in $B(u/f(u))$ (allgemeine Tggleichung): $y = (f'(u))(x - u) + f(u)$; Normale: $y = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$. **Faustregel:** Ist $P(a; b)$ ein Punkt der Funktion, so setze $u = a$, sonst (externer Punkt) setze $x = a$ und $y = b$; im Zweifelsfalle setze $u = a$.
59. (W, Abs 109/5.4.2) Umrechnung (Bogenmaß \leftrightarrow Gradmaß): $\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi}$.

x	$0 \hat{=} 0^\circ$	$\frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$	$\pi \hat{=} 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} \hat{=} 270^\circ$	$2\pi \hat{=} 360^\circ$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

60. (A, Abs 110/5.4.3) $\sin(-x) = -\sin(x)$, d.h. $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung; $\cos(-x) = \cos(x)$, d.h. $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse.
61. (A, Ag 111/287) $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$ hat Periode $p = \frac{2\pi}{b}$. K_f entsteht aus $K_{\sin(x)}$ durch Streckung mit dem Faktor a in y -Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x -Richtung sowie einer Verschiebung um $(c; d)$ Regel: Erst strecken, dann verschieben.
62. (W, Ag 113/294) Von $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$ sind zwei aufeinanderfolgende Extrema $T(x_{min}, y_{min})$ und $H(x_{max}, y_{max})$ gegeben, dann gilt:
- $$a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}; \quad c = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}; \quad d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}; \quad p = 2 \cdot (x_{max} - x_{min});$$
63. (A, Ag 114/296) $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(bx + c))' = b \cos(bx + c)$.

64. (A, Ag 244/650) Seien $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$, dann ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ (Ende - Anfang).
65. (A, Abs 286/10.10.16) **Die Parallelogrammgesetze:**

(1 PaG) Für die Mitte M von A und B gilt $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

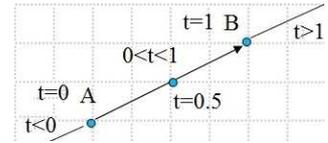
(2 PaG) A, B, C, D ist ein Parallelogramm $\Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$;

(3 PaG) Für jede Spiegelung gilt: Sei A' der an einem Gebilde G (Punkt, Gerade, Ebene) gespiegelte Punkt von A , dann ist $\vec{a}' = 2\vec{l} - \vec{a}$, wobei L der Lotfußpunkt von A auf G ist.

(4 PaG) Für den Schwerpunkt S eines Dreiecks A, B, C gilt $\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$; (einer Dreieckspyramide A, B, C, D gilt $\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$) dies sind Verallgemeinerungen vom (1 PaG).

Nur bei den Parallelogrammgesetzen dürfen sinnvollerweise Ortsvektoren (Punkte) addiert werden.

66. (A, Ag 247/666) Die Gerade durch A und B in Parameterform ist $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, ($t \in \mathbb{R}$). Für $t = 0$ ist $\vec{x} = \vec{OA}$, für $t = 1$ ist $\vec{x} = \vec{OB}$, für $t = 0.5$ zeigt \vec{x} auf die Mitte von A und B . Falls $t < 0$ ist, liegt $\vec{x}(t)$ 'links' von A ; falls $0 < t < 1$ ist, liegt $\vec{x}(t)$ 'zwischen' A und B und falls $t > 1$ ist, liegt $\vec{x}(t)$ 'rechts' von B .



(A) Die x_1 -Achse ist $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_2 -Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; **Abb. 5** Skalierung x_3 -Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

67. (W, Ag 249/672) ('Der Baum:') Seien $g_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t \cdot \vec{r}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_2$.
 Es gilt: $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_1$ lösbar ist, so ist $g_1 = g_2$, ansonsten sind g_1 und g_2 echt parallel.
 Falls $\vec{r}_1 \not\parallel \vec{r}_2$ so ist $g_1 \not\parallel g_2$, wenn zusätzlich das LGS $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1 = \vec{p}_2 + s \cdot \vec{r}_2$ lösbar ist, so schneiden sich g_1 und g_2 ansonsten sind g_1 und g_2 windschief.
68. (A, Ag 145/357) f ist bei x_0 (lokal) extremal $\Leftrightarrow f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\Rightarrow f'(x_0) = 0$; VZW $+$ \rightarrow $-$ bedeutet Maximum; VZW $-$ \rightarrow $+$ bedeutet Minimum.
 Signalwort maximal (minimal) bedeutet: 'Ableiten und die Ableitung = 0 setzen'.
69. (W, Ag 150/381) Sei f differenzierbar auf $(a; b)$ mit $f'(x) > 0$ (für alle $x \in (a; b)$), dann ist f streng monoton wachsend ($f'(x) > 0 \Rightarrow f$ smw); smf analog. Im Abitur gibt es nur strenge Monotonie! Innere Extrempunkte zerstören die strenge Monotonie; Terrassen(Sattel)punkte hingegen nicht. Monotoniebereiche: Zwischen einem Minimum und einem Maximum ist f smw und umgekehrt. Streng monotone Funktionen sind umkehrbar (injektiv).

1.1.5 Formelsammlung Klasse 11

70. (A, Ag 147/369) $W(x_0; f(x_0))$ ist ein Wendepunkt \Leftrightarrow VZW von $f''(x)$ bei $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0 \Rightarrow H(x_0; f(x_0))$ ist Hochpunkt; [$f''(x_0) > 0$ usw. ... Tiefpunkt].
 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für Extremwert, $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow E(x_0; f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
71. (Z, Ag 157/408) $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax+b})' = a \cdot e^{ax+b}$ und (A, Ag 160/423) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
72. (A, Ag 157/410) Seien $a, b > 0; a \neq 1$, dann gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$; $e^{\ln b} = b; \ln(e^b) = b$;
 (W) [$\ln(0) = -\infty$,] $\ln(1) = 0, \ln(2) \approx 0.693, \ln(e) = 1$ [, $\ln(\infty) = \infty$].
73. (A, Ag 158/412) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ (waagrechte Asymptote $y = 0$), $e^x > 0, e^{-x} > 0$.
74. (A, Ag 158/414) Die Kettenregel: $f'(g(x)) = g'(x) \cdot f'(g)$ oder $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$.
 Beachten Sie, dass bei $f'(g)$ nach g abgeleitet wird.
 Die innere Funktion $g(x)$ ist immer das, was zuerst berechnet wird.
 Bsp: $(e^{x^2})'$ sagt $g(x) = x^2, f(g) = e^g, (e^{x^2})' = 2x \cdot e^g = 2x \cdot e^{x^2}$;
 $(a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ ($a > 0$).
75. (A, Ag 159/418) Die Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
76. (W, Ag 170/452) Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:
 'Ableiten ist das Gegenteil vom Integrieren' oder $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = (F_a(x))' = f(x)$.
77. (W, Ag 170/453) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =$ Fläche begrenzt von K_f und den Geraden $x = a, x = b$ und $y = 0$.

78. (A, Ag 171/459) Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ bzw. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$, falls $n \neq -1$;
 (A, Ag 178/494) für $n = -1$ gilt: $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$.
 (A, Ag 171/460) Die Linearität des Integrals: $\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x)) dx = r \cdot \int f(x) dx + s \cdot \int g(x) dx$.
79. (A, Ag 173/471) Lineare Substitution: Sei $F'(x) = f(x)$, dann gilt für $a \neq 0$:
 $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$; **Bsp:** $\int \sin(ax+b) dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$; $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$;
80. (W, Ag 176/485) Rotiert der Graph einer Funktion f um die x -Achse, so gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$: $V = V_a(b) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t) dt$.
81. (W, Ag 177/491) Der Mittelwert m einer Funktion f auf $[a, b]$ ist $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$.
82. (A, Ag 251/681) Das Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a})^2}$. Multipliziere zwei Vektoren **nie** komponentenweise.
 Normierter Vektor: Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann zeigt $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ in Richtung \vec{a} und hat Länge 1.
83. (Z, Ag 252/689) Für den von $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ eingeschlossenen Winkel γ gilt: $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
 Insbesondere gilt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **Hinweis:** Teile **nie** durch einen Vektor!
84. (\rightarrow 13.2.1, S. 346) Sei F eine Verteilungsfunktion einer Zufallsgrößen \mathcal{X} mit Dichte f , dann gilt:
 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, $P(a < \mathcal{X} \leq b) = F(b) - F(a)$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
 $F(x)$ ist monoton wachsend und F ist rechtsseitig stetig. $\mu = E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt$;
 (nur HM III) $\sigma = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t) dt}$;
85. (\rightarrow 13.2.2, S. 349) Sei $\mathcal{X} \sim N(\mu, \sigma)$ (normalverteilt), dann gilt $P(\mathcal{X} \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$,
 $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ und $\Phi^{-1}(1 - \alpha_0) = -\Phi^{-1}(\alpha_0)$.
Sigmaregel: Mit Wk 68% hat ein Wert höchstens Abstand σ vom Erwartungswert μ , mit Wk 95% Abstand 2σ und mit Wk 99% Abstand 3σ .

1.1.6 Formelsammlung Klasse 12

86. (W, Ag 255/702) Die Ebene durch (drei) nicht kollineare Punkte A, B und C in Parameterform ist $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{a} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ ($r, t \in \mathbb{R}$).
 Es gibt (mindestens) drei Darstellungsformen der Ebene:
 a) Die Parameterform (s.o.) wenn aus drei Punkten eine Ebene berechnet werden soll;
 b) Die Punktnormalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ (\vec{n} heißt Normalenvektor, bei Verfahren Abs. 10.5.9);
 c) die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ (sonst immer gut).
 Es gilt $\vec{n} \perp \vec{s}_1$ und $\vec{n} \perp \vec{s}_2$; Ein möglicher Normalenvektor \vec{n} kann durch $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ berechnet werden.
87. (A 249/676+257/714) Die Koordinatenebenen sind: x_1x_2 -Ebene: $x_3 = 0$; x_1x_3 -Ebene: $x_2 = 0$;
 x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$. Die Ebene $x_1 + x_3 = 1$ ist echt parallel zur x_2 -Achse.
88. (A, Ag 259/724) Seien \vec{a}, \vec{b} dreidimensional, dann definieren wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
 (Vektor- oder Kreuzprodukt).
 Sei $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{s}_1 + t \cdot \vec{s}_2$ eine Ebene (in Parameterform mit \vec{s}_1, \vec{s}_2 l.u.). Berechne $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$;
 setze P in die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ ein und berechne so e .
89. (A, Abs 259/10.4.1) Seien \vec{a}, \vec{b} dreidimensional, dann gilt: i) $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;
 ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und \vec{b} sind parallel (linear abhängig);
 iii) $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ die Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.
 iv) Die Fläche eines Dreiecks A, B, C ist $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

90. (A, Ag 260/730) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensional, dann gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist das (orientierte) Volumen, des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (räumliches Parallelogramm). Dabei ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

Das Volumen V einer Pyramide mit Spitze S und

$$\text{parallelogrammförmiger Grundfläche } A, B, C, D \text{ ist: } V = \frac{1}{3} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS}|.$$

$$\text{dreieckiger Grundfläche } A, B, C, \text{ ist: } V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS}|.$$

91. (A, Abs 195/8.1) Ein exponentielles Wachstum wird durch die Funktion $f(x) = y = c \cdot e^{kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot y$. Ein beschränktes Wachstum (mit Schranke S) wird durch die Funktion $y = S - c \cdot e^{-kx}$ beschrieben. Es genügt der Dgl $y' = k \cdot S - k \cdot y \Leftrightarrow y' = k \cdot (S - y)$.
In diesem Abschnitt sind $g_i : \vec{x} = \vec{p}_i + t \cdot \vec{r}_i$ (Geraden) und $E_i : (\vec{x} - \vec{p}_i) \cdot \vec{n}_i = 0$ (Ebenen).

$$92. \quad \begin{aligned} \text{(W, Ag 263/740)} \quad \angle(g_1, g_2) &= \cos^{-1} \left(\left| \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} \right| \right), & \angle(E_1, E_2) &= \cos^{-1} \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| \right), \\ \angle(E_1, g_1) &= \sin^{-1} \left(\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{r}_1|} \right| \right). \text{ aber} & \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \right). \end{aligned}$$

93. (A, Ag 264/750) Sei $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = e$ eine Ebene, dann ist deren Abstandsform (HNF):

$$d = \left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right| \text{ oder } d_{\text{orient}} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \text{ (Orientierung in Richtung von } \vec{n}\text{)}.$$

$$94. \quad \text{(W, Ag 265/752) Der Abstand windschiefer Geraden ist } d = \left| (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \right|.$$

95. (W, Ag 251/682, 266/754) Ein Objekt bewegt sich vom Punkt P aus geradlinig in Richtung \vec{r} mit konstanter Geschwindigkeit v , so befindet es sich zum Zeitpunkt t bei $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \frac{v}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}$.

1.1.7 Formeln des Themenfriedhofs, die früher auswendig zu lernen waren

96. (Kl. 9, Ag 228/575) Sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck, $q = c_a$ und $p = c_b$ die

Hypotenusenabschnitte, dann gilt: $h^2 = p \cdot q$ Höhensatz $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ Kathetensätze.

97. (Kl. 9, Abs 236/9.4.5) Sei A, B, C ein allgemeines Dreieck, R dessen Umkreisradius, dann gilt

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R \quad \text{Kosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Damit ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.

98. (Kl. 9+10, Ag 109/279) Die Additionstheoreme lauten:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

99. (Kl. 9+10, Ag 323/822 + 61/149) Geometrische Summe: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Für $|q| < 1$ geht $q^{n+1} \rightarrow 0$: Damit gilt: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$ (geometrische Reihe).

3. binomische Formel: $(a - b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \dots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$.

100. (Kl. 10, Ag 106/272 + 107/274) Formel der allgemeinen Symmetrie:

K_f ist achsensymmetrisch + zur Achse $x = a \Leftrightarrow f(a - t) = f(a + t)$;

K_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(a; b) \Leftrightarrow f(a - t) + f(a + t) = 2b$; (t hebt sich weg).

101. (Kl. 11, Ag 161/426) Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

102. (Kl. 8+11, Ag 21/10 + 252/687) $\det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \hat{=} \text{der (orientierten) Fläche des von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$

1.1.8 Formeln von M_+ oder aus HM

103. (A \rightarrow 3.1.2, S. 49) Komplexe Zahlen: **Die vierte Binomische Formel:** $(a+ib) \cdot (a-ib) = a^2+b^2$;
 $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$; **Eulerformel:** $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$;
 $e^{2\pi i} = e^{2k\pi i} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. **Moivreformel:** $z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $k = 0..n-1$.
104. (A 196/8.2.1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$;
 für $|x| < 1$ gilt: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;
105. (A 179/500) Partielle Integration: Seien u, v, f, g diffbar, dann gilt: $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$;
 Substitutionsregel der Integration: $\int f(g) \cdot dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ oder $dg = g'(x) \cdot dx$.
106. Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix mit $\det(\underline{A}) = ad - bc \neq 0$, dann gilt $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
107. (\rightarrow 12.4, S. 336) Es werden n aus N Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; M der N Kugeln sind Erfolgsfolge. Sei \mathcal{X} die Anzahl der gezogenen Erfolge, dann ist $P(\mathcal{X} = k) = \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} : \binom{N}{n}$; $E = \frac{n \cdot M}{N}$.
108. (W) (353/13.3.2) Seien \mathcal{X}, \mathcal{Y} Zufallsgrößen, $|\mathcal{X}| = n$, $P(\mathcal{X} = x_i) = p_i$, ($i = 1..n$), $a, b \in \mathbb{R}$,
 $\mu = E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$; Standardabweichung: $\sigma = \sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$
 $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$, $E(a\mathcal{X} + b) = a \cdot E(\mathcal{X}) + b$, $V(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - (E(\mathcal{X}))^2$,
 $V(a\mathcal{X} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{X})$, $\chi^2 = \sum \frac{(n \cdot o - n \cdot e)^2}{n \cdot e}$
 Falls \mathcal{X} und \mathcal{Y} unabhängig sind, gilt $E(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) \cdot E(\mathcal{Y})$, $V(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = V(\mathcal{X}) + V(\mathcal{Y})$.
 Eine **Stichprobenverteilung** $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n}{n}$ (\mathcal{X}_i identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ) ist näherungsweise $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ verteilt ($\sigma(\bar{\mathcal{X}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).
109. (A) (359/930) **Satz von Schwarz:** Sei $z = f(x, y)$ diffbar, dann gilt $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(f)) = \frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(f))$.
 Die Hessematrix ist symmetrisch.
110. (L) (359/932, 360/933 und 360/934) Sei $P_i(x_i; y_i)$ ($i = 1..n$) eine Punktwolke.
 Die RGP optimierte Regressionsgerade berechnen wir mit folgendem LGS:
 $m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$
 $m \cdot \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i$
 Kovarianz: $Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n}$; Korrelationskoeffizient $r_{x,y} := \frac{Cov(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sigma(\mathcal{X}) \cdot \sigma(\mathcal{Y})}$;
111. **Lambertsche W-Funktion:** $W(x)$ ist die UKF von xe^x ; $e^x + ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} - W(\frac{e^{b/a}}{a})$ ($a, b > 0$).
112. (**Vorbereitung auf Wettbewerbe**) Wichtige Zahlen sind: $e \approx 2.718$, $\pi \approx 3.1416$,
 $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$, $\ln(2) \approx 0.693$, $\sin^{-1}(0.6) \approx 36.87^\circ$,
 $\sin^{-1}(0.8) \approx 53.13^\circ$. Ein n -Eck hat $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Wichtige Zahlenfolgen sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	natürliche Zahlen $\cup \{0\}$
$\sum_{i=1}^n$	0	1	3	6	10	15	21	28	Dreieckszahlen
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	Fakultäten
$\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Zahlen

1.1.9 Fehlercodes und Abkürzungen

Folgende Fehlercodes verwende ich in der Regel bei der Korrektur von Arbeiten.

<u>Kürzel</u>	<u>Erklärung</u>	<u>Punktabzug</u>
R, Vz, PvS, ug	Rechenfehler, Vorzeichen, Punkt vor Strich, ungenau	manchmal
$uv / ub / D / !$	unvollständig / unbrauchbar / Denkfehler / schlimmer Fehler	normal ja

<i>Alg</i>	= Algorithmus;	<i>Arg</i>	= Argumentation;	<i>AS</i>	= Antwortsatz;	<i>EH</i>	= Einheit;	<i>Erg</i>	= Ergebnis;
<i>Int</i>	= Interpretation;	<i>MA</i>	= mathematischer Ansatz;	<i>Rg</i>	= Rechnung;	sind Zusätze z.B. bei <i>wv</i>			
<i>Deshalb</i>	Deshalb bringe ich Ihnen es anders bei								ja
<i>Ad, FS, S, SF, Sw</i>	Ausdruck, Fachsprache, Schreibfehler, Schreibweise								nein
<i>Agtxt / f / uk</i>	Aufgabentext - in der Aufgabe steht etwas anderes / falsch / unklar								meistens
<i>folgeschwer</i>	auch <i>fatal</i> R oder SF mit problemändernden Folgen								ja
$\sqrt{\quad} / (\sqrt{\quad})$	richtig / mit falschem Wert richtig weitergerechnet								nein
<i>PRWT</i>	die Produktregel (der Ableitung) gilt auch im Wahlteil								ja
<i>Algebra!</i>	die Algebra der Mittelstufe ist mangelhaft								normal ja
<i>GTR</i>	GTR Befehle sind (im Abitur) nicht zugelassen								nein
'I hope so'	hier wurde der Aufgabentext vom Schüler falsch (oder eben anders) interpretiert, was aber leider möglich war								nein
naja	falsche oder dürftige Ausdrucksweise, vermutlich richtig gedacht								nein
<i>wdh, kü, un</i>	Hinweise: wiederholen, kürzen, unnötig, \ddot{U} = Übertrag (aktuelle Punktzahl)								
Die volle Punktzahl ohne Korrekturzeichen bedeutet meist, dass alles richtig ist.									

Abkürzungen:	Abs= Abschnitt,	Ag = Aufgabe oft als Seite/Nummer,
as = achsensymmetrisch,	BAG= Basisaufgabe,	BD = Binnendifferenzierung,
ber = berechnen, best=bestimmen, beschr = beschreiben,	BFS = Banachscher Fixpunktsatz,	
\overline{DHBW} = kein Stoff der DHBW	Dgl = Differenzialgleichung,	ExAg = Extremwertaufgaben
exp = exponentielles,	Fkt = Funktion,	GTR = grafischer Taschenrechner,
HA = Hausaufgabe,	HP = Hochpunkt,	HgV = hypergeometrische Vert.
ihlDglmkK = inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten,		
ia = im allgemeinen, idR = in der Regel,	KA=Klassenarbeit,	KF = Koordinatenform,
LFZ = Linearfaktorzerlegung,	LGS = lineares Gleichungssystem,	l.a. (l.u.) linear(un)abhängig
LöVo = Lösungsvorschläge	mBdA (oBdA) = mit (ohne) Berücksichtigung der Anordnung	
mEn = meines Erachtens nach,	MNF = Mitternachtsformel,	mf = monoton fallend,
MK = Mathe Känguru	Ne = Nenner, Nst = Nullstelle,	oZ = ohne Zurücklegen,
PFZ = Primfaktorzerlegung,	Pkt = Punkt,	PNF = Punktnormalenform
PF = Parameterform	ps = punktsymmetrisch,	PSF = Punktsteigungsform,
sA= senkrechte Asymptote	smw = streng monoton wachsend,	SvN = Satz vom Nullprodukt,
SvP = Satz von Pythagoras,	TdV = Trennung der Variablen,	Tg = Tangente, TP = Tiefpunkt,
trig = trigonometrische,	UE = Unterrichtseinheit,	UKF = Umkehrfunktion,
VdK = Variation der Konst.	Vert = Verteilung	Vorber= Vorbereitung
VZW = Vorzeichenwechsel	wA= waagrechte Asymptote	Wk= Wahrscheinlichkeit
WP=Wendepunkt	Wt = Wachstum	Wth =Wahrscheinlichkeitstheorie
Zä = Zähler Zch = Zeichnung	ZPF = Zweipunkteformel	ZG=Zufallsgröße.

1.1.10 Die Vorbereitung zwischen den Schuljahren

Wie soll ich mich auf das nächste Schuljahr vorbereiten? Was soll ich in den Sommerferien wiederholen? Diese Fragen versuche ich in diesem Abschnitt zu beantworten. Zu einer guten Vorbereitung gehört auch die Wiederholung (Beherrschung) der bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Formeln. (Z)=Exlehrplan, (N)=Neu im Lehrplan (Bemerkung im Abs. 15/1.2).

Vorbereitung auf Klasse 9

Unterrichtseinheit	Basisthema	Seite/Aufgabe in Hurra Mathematik			
9 ₁ Potenzrechnen	binomische Formeln	19/2,	21/12,	30/63,	21/12
9 ₃ Ähnlichkeit	Bruchgleichungen	31/67			
9 ₅ Satz von Pythagoras	Wurzelrechnen	28/45,	28/47,	29/51,	225/558
9 ₆ Umkehrfunktion	quadratische Fktn	24/28,	90/212,	90/213,	98/243
9 ₈ Weiterführung der Wth	Pfadregel	314/798,	314/799		

Vorbereitung auf Klasse 10

10 ₁ Ganzrationale Fktn	LFZ, Parabeln	30/63, 31/66, 90/212, 90/213, 98/242;
10 ₂ Binomialverteilung	Pfadregel - Erwartungswert	317/811, 324/830, 317/810;
10 ₃ Differenzialrechnung	lineare Funktionen	98/243;
10 ₄ Trigonometrische Fktn	Winkelberechnung	235/615, 236/617, 235/616;
10 ₆ Extremwertprobleme	Scheitelber. ExAg	92/220;
10 ₇ Wachstum (Z)	exp. Wachstum	58/137;

Vorbereitung auf Klasse 11 (LK)

LK-Basis: **Kap.2:** 22/19, 24/29, 29/50, 30/59, 30/64, 31/67, 33/73, 36/101, 37/107, 38/115,

Kap. 5: 99/247, 105/264 d), 108/277, 111/289, 113/292, **Kap.6:** 141/342, 148/374, 153/392, 155/401,

11 ₁ Folgen (Z)	Grenzwerte	63/155, 63/154, 138/326;
11 ₂ WP + Ableitungsregeln	Klass. von Extremwerten	152/391, 156/404;
11 ₄ trig. + gebrrat. Fktn	Hyperbeln + trig. Fktn	152/390, (116/305);
11 ₅ 3x3 LGS	LGS	246/662;
11 ₆ Das Skalarprodukt	Parallelogrammgesetze	246/659;
11 ₇ Testen von Hypothesen	Binomialverteilung	332/854, 333/857, (334/858), 335/860;
11 ₈ Die Normalverteilung	Integral + Stetigkeit	150/384, 172/462

Vorbereitung auf den SemKu bzw. auf HM2 für den Abs. 'Die Normalverteilung' 346/13.2

20/6, 94/228, 98/243, 154/396, 160/420, (I*) Abs. 182/7.4, 314/798, nur SemKu: 317/807 + 335/864.

Vorbereitung auf Klasse 12

12 ₁ Ebenenberechnung	Lagebeziehung von Geraden	249/674, 250/677;
12 ₂ Das Spatprodukt	Determinante	252/688, 252/689f, 253/693;
12 ₃ Differenzialgln (Z)	Änderungsraten + Differenzenquotient	64/163, 138/329, 159/415;
12 ₄ Abstände	Bew. Ag. + Winkelber.	251/683, 252/685, 252/689f;

Vorbereitung auf das Ingenieurstudium

Sie möchten sich auf ein MINT Studium vorbereiten? Dann ist dieses Buch für Sie genau richtig. Aus dem Schulteil empfehle ich Ihnen besonders folgende Abschnitte:

Klasse 9: Ungleichungen (Abs: 2.2.7), Anwendungen des Umfangswinkelsatzes (Abs: 9.2.11 nur M+I), der Kosinussatz (Abs: 9.4.6), Kugeln (Abs: 9.6.4), Restklassenringe (Abs: 2.4.5, nur M+I);

Klasse 10: das komplette Wachstum (Abs: 4.2), Linearfaktorzerlegungn (Abs: 5.3.11), Symmetrie + Additionstheoreme (Abs: 5.4.3), trigonometrische Gleichungen (Abs: 5.4.6), der Monotoniesatz (Abs: 6.2.6, nur M+I; ja, diesen unterrichte ich in Klasse 10 tatsächlich!);

Klasse 11: Folgen (Abs: 4.3), implizites Differenzieren (Abs: 6.3.6, oder wie haben Sie bewiesen, dass $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$?), die komplette Integralrechnung (Abs: 7.1) - beachten Sie hierbei, dass die schweren Themen (Abs: 7.4 und 7.5) kein Schulstoff mehr sind, Beweise mit Vektoren (Abs: 10.2.4, nur M+I);

Klasse 12 inkl. Vertiefungskurs: Komplexe Zahlen (Abs: 3.1), die Regel von de l'Hospital (Abs: 6.3.11), Taylor und Dgln (Abs: 8.2), das Spatprodukt (Abs: 10.4), die HNF (Abs: 10.5.5).

Falls Sie Mathe, Informatik oder Wirtschaft studieren möchten, sollten Sie auch die komplette Wahrscheinlichkeitstheorie Abs. 12.1 bis 13.2.2 wiederholen.

Vorber **HM1:** 125f, 128g, 130j, 417, 419, 427, 441, 498, 500 a,b,d, 698, 723, 731, 759, 768b, 772, 777g, 778f.

Vorber **HM2:** 515, 523, 524g, 525e, 528e, 530e, 531e, 817, 823, 830, 859f, 864, 868, 870, 873.

Vorber **HM3:** 305, 877, 896, 904, 905e, 909d, 918d, 919b, 13.3.4, 13.3.5, 931, 932, 934e.

1.2 Der Themenfriedhof (GFS)

Dieser Abschnitt soll an die Themen erinnern, die zu meiner Zeit noch Schulstoff waren und inzwischen ersatzlos aus dem Lehrplan gestrichen wurden - (sie nennen es 'entrümpeln'). Ich vermisse Euch alle!

2016: Folgen + Differentialgleichungen, beschränktes Wachstum;

2012: zweiseitiger Hypothesentest, schiefe Asymptoten und Näherungskurven, LGS mit Parameter, rechnerischer Nachweis der linearen Abhängigkeit, die Sehnentrapezregel, Kepler-Fass-Regel (Simpsonregel), Quotientenregel, Polynomdivision, vollständige Induktion;

2011: ε, n_0 - Definition der Konvergenz, ε, δ -Definition der Stetigkeit, logistisches Wachstum;

2004: äußere nicht lineare Substitutionsregel der Integration, partielle Integration lineare Optimierung, Kreisgleichungen, Kugelgleichungen, Additionstheoreme, Sinussatz, Kosinussatz, Boolesche Algebra, Schalteralgebra, Körper und Gruppentheorie auch zyklische Gruppen, Schubspiegelungen, Drehstreckungen inkl. Konstruktion eines Drehstreckzentrums, Ellipsen inkl. Gärtnerkonstruktion und Krümmungskreisconstruction, affine Abbildungen, affine Koordinatensysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren, Invariantes Rechtwinkelpaar, Nichtdiagonalisierbarkeit von Scherstreckungen, Hauptachsen-Transformation auch von Kegelschnitten, Konstruktionen bei Achsenaffinitäten, allgemeine Skalarprodukte, Die Cantorschen Diagonalverfahren, Die Russellsche Antinomie, Innere Substitution der Integration, Rotationskörper um die y -Achse, Diskussion von Wurzel und Betragsfunktionen, Aussagenlogik inkl. Isomorphie zur Mengenlehre, Zahlensysteme, Aufbau eines Zahlenbereiches mit den Peanoaxiomen, Satz von Bolzano-Weierstraß (Weierstraß'sches Halbierungsverfahren), geometrische Summe, geometrische und die harmonische Reihe, Potenzmengen, Mengenlehre, Determinante;

Bemerkung: 2012 war in BW der flächendeckende Übergang von G9 auf G8 und dieser sollte eigentlich keinen Stoff kosten. Die Einführung des LK 2019 brachte (eigentlich) keinen neuen Stoff.

1.3 Vorworte

1.3.1 Vorwort zur Version 7.0 (2019): mobile Mathe

Hurra Mathe gibt es ab V 7 (Probezeit 2018: V6.9) als online Version mobile Mathe und wurde von Pascal Köstler entwickelt (vielen Dank). Gezeigt werden Aufgabe, Lösung und zugehörige Videos. Jetzt kann Hurra Mathe überall hin mitgenommen werden und ist auch im Unterricht Tablet-fähig.

1.3.2 Vorwort zur Version 6.7 (2016): Die Mathematik ist ein Rosamunde-Pilcher-Film

Welche Filme schauen Sie am liebsten? Einen, bei dem am Ende der Held nicht seine Angebetete bekommt, gar stirbt und die Welt in Schutt und Asche liegt? Nein! Deshalb braucht auch jede Mathematikaufgabe ein Happy End. Mein neues Ziel ist es, dass bei allen Aufgaben 'schöne' Ergebnisse (was auch immer das sein mag) herauskommen, auch wenn das mit der Realität nur selten etwas zu tun hat. Es ist wichtig dem Schüler ein gutes Gefühl zu vermitteln. Die Beschreibung der Wirklichkeit ist nicht unsere Aufgabe, sondern die der anwendenden Wissenschaften. Der Mathematik-Unterricht ist wie ein Rosamunde-Pilcher Film: Die Probleme scheinen anfangs unlösbar, am Ende werden alle (manchmal noch mehr) gelöst, und nie geglaubte Verwandtschaften treten zu Tage. Bei Winkelaufgaben (und bei Ag mit (RP)) kann dies leider kaum gelingen, deshalb sind diese von diesem Umbau ausgenommen.

1.3.3 Vorwort zur Version 6.5 (2014)

Mathematik hat viel mit Freude und Spaß zu tun, manchmal ist sie auch ein Bisschen selbstironisch. Deshalb habe ich von Anfang an in *Hurra Mathematik* mehr oder weniger passende Cartoons (Zeichnungen: Anna Herp) eingebaut. In diesen werde ich als schlanker Dozent mit wildem Haar (manchmal mit Brille) und Kittel (oder Hemd, das nicht in der Hose steckt), dargestellt. Oftmals treffen hier die heile Welt des Mathematikers und die unverständliche reale Welt schonungslos

aufeinander, was nicht immer ohne Blessuren endet. Nachdem ich festgestellt habe, dass sich die Cartoons beinahe einer größeren Beliebtheit erfreuen als die mathematischen Inhalte selbst, werde ich diese ab Version 6.5 nummerieren und einen Teil des sagenumwobenen Kapitels 14 mit veröffentlichen.



Es stellt sich also die Frage, ob es eine Prozedur (Programm) H geben kann, welches bei Eingabe eines Programms Q und dessen Eingabe x entscheidet, ob Q bei Eingabe von x anhält oder nicht:

$$\begin{aligned} H(Q, x) &:= true && \text{falls } Q \text{ bei Eingabe von } x \text{ hält} \\ H(Q, x) &:= false && \text{falls } Q \text{ bei Eingabe von } x \text{ nicht hält.} \end{aligned}$$

In unserem Beispiel wäre $H(P, 5)=false$ und $H(P, 3)=true$.

Betrachten wir wieder ein stark vereinfachtes Programmstück:

```
procedure Y(A:program);
begin
  if H(A,A) then while true do skip
                else skip;
end;
```

Das Programm Y hält bei Eingabe von A genau dann, wenn $A(A)$ nicht hält. Es stellt sich die Frage, ob $Y(Y)$ hält oder nicht:

1.Fall: $Y(Y)$ hält, dies bedeutet $H(Y, Y) = true$, dass heißt $Y(Y)$ bleibt beim Durchlauf in der Endlosschleife hängen, hält also nicht an. Dies ist ein Widerspruch.

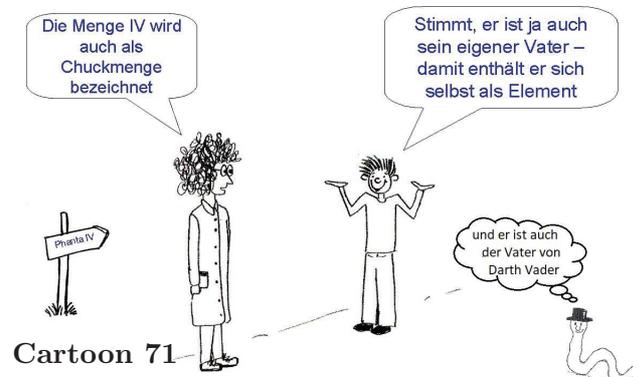
2.Fall: $Y(Y)$ hält nicht, dies bedeutet $H(Y, Y) = false$, dass heißt $Y(Y)$ bleibt beim Durchlauf nicht in der Endlosschleife hängen, hält also an. Dies ist wiederum ein Widerspruch.

Die Lösung dieses Problems ist, dass es keine Prozedur H geben kann, das Halteproblem ist also unlösbar. Es gibt noch weitere unlösbare Probleme, wie z. B. das Totalitätsproblem. Mehr zu diesen Themen finden Sie in der theoretischen Informatik.

Nachwort

Hurra Mathematik ist kein statisches Werk. Sie halten nur eine Momentaufnahme in den Händen. Einige Lösungen zu den Aufgabenkapiteln und aktuelle Informationen finden Sie auf meiner Webseite: Sd.SLT.biz :-). Leider fehlt weiterhin das Ende von Kapitel 14 (weil ich mich nicht zur Veröffentlichung traue).

EVP: 21 € printed in Backnang



Cartoon 71

14 Anekdoten

14.1 Erziehungs- und Bildungsauftrag

14.1.1 Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen (oder ganze Familie schafft)

Ich freue mich über Ihr Interesse an einer GFS im Fach Mathematik. Besonders empfehlenswert ist eine GFS für Schüler, die auf der Kippe stehen, oder die in Mathematik zu kämpfen haben. Voraussetzung für eine GFS ist, dass alle Klassenarbeiten mitgeschrieben (oder nachgeschrieben) wurden.

1) Ich nehme nur GFS in Form einer Unterrichtsstunde (45') entgegen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Eine schriftliche Ausarbeitung muss nicht gemacht werden. Bitte schieben Sie die GFS nicht zu sehr nach hinten.

2) Das Thema der GFS muss folgenden Kriterien genügen:

- Ich muss es verstehen (+ die Klasse muss es verstehen können).
- Es darf noch nicht im Unterricht behandelt worden sein.
- Es muss (genügend) mathematischen Gehalt haben.

Somit sind 'Geschichte der Mathematik' oder Wiederholungen normalerweise nicht GFS-fähig. Die GFS sollte (mindestens) ein eigenes Beispiel (also nicht aus meinem Buch) enthalten.

3) Im Allgemeinen hat jede GFS zwei Vortreffen und (wenn gewünscht) ein Nachtreffen: Beim ersten Vortreffen sollten Sie sich ins Thema eingearbeitet haben und eine Unterrichtsstunde im Großen

und Ganzen geplant haben. Das Vortreffen sollte spätestens 1 Woche vor dem GFS-Termin stattfinden. Beim zweiten Vortreffen sollten Sie meine Änderungswünsche eingearbeitet haben. Bitte halten Sie sich an vereinbarte Termine - Termintreue wird mit bewertet.

Der größte Feind der Qualität ist die Eile



- 4) Eine Unterrichtsstunde besteht in der Regel aus (vielen Dank an Frau Straub)
- einer Problemdarstellung (wichtig: Wecken Sie ein Problembewusstsein beim Schüler) (≈ 5 min),
 - einer Problemlösung am Beispiel (oft wird Teil a gelöst) (≈ 10 min),
 - einer Verallgemeinerung (≈ 5 min),
 - einer Formulierung als Satz (mit Voraussetzung) - arbeiten Sie dies als **Höhepunkt** heraus ($\approx 5'$),
 - dem Beweis (dieser kann auch in der Herleitung b), c) stecken) (≈ 10 min),
 - Beispiele und Übungsaufgaben; eine Aufgabe dauert ca 5 Minuten, (≈ 10 min).

Bemerkung für Referendare: Der vorgestellte Unterrichtsaufbau ist nur als Richtlinie zu sehen. Beachten Sie, dass Sie kurze Zeit für Hausaufgaben einplanen. Überhaupt ist ein guter Unterricht das Ergebnis eines guten **Zeitmanagements**. Es ist wichtig, dass Sie lernen Ihren eigenen Stil zu finden und zu unterrichten und bleiben Sie sich treu, sonst enden Sie als schlechte Kopie. Wenn Sie bei mir hospitieren, machen Sie bitte ein Stundenprotokoll und planen Sie danach Zeit für Fragen + Kritik ein.

5) Die GFS sollte frei (und nicht abgelesen) gehalten werden. Bitte schreiben Sie Wichtiges wie Definitionen und Sätze an und sagen Sie diese nicht nur. Verwenden Sie gerne auch Folien, vor allem an Stellen, an welchen Sie unsicher sind; aber: Sagen Sie etwas dazu und legen Sie die Folie nicht nur auf. Wichtige Teile (oft 4 e) sollten von Ihnen im Unterricht vorgerechnet werden. Es ist kein guter Stil, Folien aufzulegen und 'abschreiben' zu sagen (und sonst nichts); auch angeschriebene Lösungen sollten erklärt und nicht nur reproduziert werden.

6) Sprechen Sie wenn möglich zum Publikum nicht zu schnell und nicht zu leise und schreiben Sie Arbeitsaufträge an. Und reden Sie nicht wenn andere reden (Ruhe einfordern). Vergewissern Sie sich (eventuell durch Rückfragen), ob etwas beim Zuhörer angekommen ist. Stellen Sie gegebenenfalls Querverweise her. Sollten Sie mein Buch verwenden (oder der Klasse Fragen stellen) sollten Sie die Antwort nicht gleich nach der Fragestellung geben, sondern der Klasse erst Zeit zur Besinnung geben. Bauen Sie etwas 'Spannung' auf und geben Sie die Ergebnisse nicht sofort preis ('überlegt euch, wie das geht'), die Zuhörer sollen die Möglichkeit haben, selbst auf das Ergebnis zu kommen (siehe entdeckendes Lernen). Bitte geben Sie bei Übungsaufgaben nicht nur das Ergebnis, sondern auch noch dessen Rechenweg an.

7) Machen Sie in jedem Falle **Probenvorträge** - am besten mit interessiertem Publikum. Fragend entwickelnder Unterricht ist erwünscht (aber nicht notwendig). Achten Sie auch auf angemessene Zeit bei den Arbeitsphasen; vor allem gegen Ende sollten diese nicht zu lang sein.

8) Wichtig: Stellen Sie Kontakt zu den Schülern her. Der Klassenprimus ist ein guter Indikator dafür, ob überhaupt etwas angekommen ist. Sie dürfen (und sollen) gerne durch das Klassenzimmer gehen. Vermeiden Sie lange 'Privatgespräche'; entscheiden Sie, ob eine persönliche Frage individuellen oder allgemeinen Charakter hat und bringen Sie die Frage gegebenenfalls ins Plenum. Bereiten Sie genügend Übungsaufgaben (eventuell auf Folie) vor.

Zum **Outfit** nur soviel: Es sollte evtl. ein Bisschen besser als normal sein. Bitte tragen Sie keine Kleidung mit fragwürdigem Aufdruck (z.B. Totenkopf) (und bei mündlichen Prüfungen keine Turnschuhe).

14.1.2 Leitfaden für mündliche Prüfungen (im Abitur)

(Thx J. Schölkopf + L. Bonfert, 2016) Bei einer mündlichen Prüfung (mP) gibt es 4 Beteiligte: **1)** der Prüfling (= Sie), **2)** der Prüfer (= Sd), **3)** der Protokollant (= ?/Mz) und **4)** der Vorsitzende (das ist hier in der Probeprüfung der ganze Rest der Klasse). Als Protokollant notieren Sie die Fragen von Sd und dessen Bemerkungen; NICHT die Antworten des Prüflings.



Ein Merz und eine Seele

Die mP in Mathe besteht aus einem 10' Präsentationsteil und einem 10' Prüfungsteil. Beim Präsentationsteil erhalten Sie eine Aufgabe (oft mit einer Schar), die Sie 20' vorbereiten. Diesen Vortrag halten Sie meistens mit Ihren Aufzeichnungen unter der Dokumentenkamera, nicht an der Tafel.

16 Abiturvorbereitung

Inhaltsverzeichnis:

16.1	Operatoren aus dem Bildungsplan 2016	869
16.2	Das WTR Curriculum von Herrn Bittermann	871
16.3	Was sollte ich nach welcher Unterrichtseinheit können?	875
16.4	Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Abitur des LK	876
16.5	Die Abituraufgaben 2021, 2020 + 2019 (+ Geometrie 2018)	877
16.6	Musteraufgaben für das Abitur 2021	894
16.7	Musteraufgaben Abitur 2019/2020	898
16.8	Stochastik-Abiturteile vor 2019 komplett auf Niveau Klasse 10	904
16.9	Die mündliche Prüfung des Basiskurses (GK)	907
16.10	Aufgaben aus dem IQB-Pool (Aufgaben: IQB21.slt.biz)	915
16.10.7	Funktionen aus dem Analysisteil des Leistungskurses	930
16.10.8	Aufgaben aus dem Mathe Känguru ohne WTR	930

Die LoeVo aus Kap 16 finden Sie unter <http://www.slt.biz/Unterricht/Kapitel16.htm>

Zwar darf ich mit Ihnen keine Absprachen treffen, aber von der Weitergabe meiner bisherigen Wahlen hat niemand etwas gesagt. Deshalb hier der Abschnitt 'Wie habe ich gewählt?'

2021: 2 2 2 2, 2020: 1 1 1, 2019: 2 1 1, 2018: 1 2 2, 2017: 1 1 1, 2016: 2 1,
2015: 2 1, 2014: 1 2, 2013: 1 2, 2012: 3 2, 2011: 3 2, 2010: 3 1;

16.1 Operatoren aus dem Bildungsplan 2016

Die Bemerkungen in eckigen Klammern [] sind Zusätze von mir.

In den Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen werden Operatoren (handlungsleitende Verben [Imperative]) verwendet. Standards legen fest, welche Anforderungen die Schülerinnen und Schüler in der Regel erfüllen. Zusammen mit der Zuordnung zu einem der drei Anforderungsbereiche (AFB) dienen Operatoren einer Präzisierung. Dies sichert das Erreichen des vorgesehenen Niveaus und die angemessene Interpretationen der Standards.

16.1.1 Beschreibung der drei Anforderungsbereiche

AFB I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren [Reproduktion: Aufgabenniveau 1 und teilweise 2].

AFB II umfasst das selbstständige Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare, neue Sachverhalte [Reproduktion und teilweise Transfer: Aufgabenniveau 2-3].

AFB III umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit selbstständiger Auswahl geeigneter Arbeitstechniken mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen und das eigene Vorgehen zu reflektieren [Transfer: Aufgabenniveau 3-5].

16.1.2 Zuordnung zu Anforderungsbereichen

Die Zuordnung eines Operators ist im Einzelfall auch vom Kontext von Aufgabenstellungen und ihrer unterrichtlichen Einordnung abhängig. Im Folgenden werden die Operatoren dem überwiegend in Betracht kommenden Anforderungsbereich zugeordnet. Verben der mathematischen Fachsprache Handlungsleitende Verben wie rechnen, multiplizieren, lösen, differenzieren, zeichnen, messen, erweitern, kürzen, umwandeln, vergrößern, abschätzen, schließen, konstruieren, Darstellungen wechseln oder ineinander überführen werden hier nicht beschrieben. Ihre Bedeutung ist fachsprachlich definiert, die Zuordnung zu einem Anforderungsbereich ist dem Kontext zu entnehmen.

Operatoren	Beschreibung	AFB
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen	I
anwenden, durchführen	nach bekannten Regeln oder Anweisungen von einer Aufgabenstellung zu einem definierten Ziel gelangen	II
auswerten	Daten, Einzelergebnisse oder sonstige Sachverhalte zu einer abschließenden, begründeten Gesamtaussage zusammenführen	II
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnungen, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitungen oder inhaltliche Argumentation verifizieren oder falsifizieren	III
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung genügt nicht.	I [-III]
beschreiben, formulieren	einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: 'Beschreiben Sie in Stichworten') beziehungsweise in einer vorgeschriebenen Form darstellen (zum Beispiel: 'Beschreiben Sie als Term')	II
bestimmen, erschließen	Lösungen, Lösungswege beziehungsweise Zusammenhänge auf der Basis von Vorkenntnissen oder Verfahren finden und darstellen. Die Argumentation mit Hilfe einer Zeichnung kann genügen.	II
beurteilen, bewerten	einen Sachverhalt nach fachwissenschaftlichen oder fachmethodischen Kriterien, persönlichem oder gesellschaftlichem Wertebezug begründet einschätzen und ein selbstständiges Urteil formulieren	III
beweisen, [zeigen]	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren	III
darstellen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte beziehungsweise maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts	I
deuten, interpretieren	Sachverhalte, Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse in eine andere mathematische Sichtweise umdeuten oder rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	II
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterbearbeitung aufbereiten	II
erkennen	Muster ohne ausführliche Begründung feststellen beziehungsweise feststellen, dass in einer Situation bestimmte fachliche Definitionen zutreffen	I
erklären, erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden	II
identifizieren	mathematische Objekte und die zugehörigen Fachbegriffe begründet miteinander verbinden	I
nutzen, umgehen mit, verwenden	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen	II
skizzieren	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts graphisch vereinfacht darstellen	II

überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren	III
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden	II
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten	II
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen	II

16.1.3 Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- 1) durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- 2) angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- 3) Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsgrößen)
- 4) keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Wird in einer Aufgabenstellung ein 'exakter Wert' gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z.B. $\frac{6}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$, ...) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

16.2 Das WTR Curriculum von Herrn Bittermann

16.2.1 Basisfunktionen bis Klasse 8

Tausender-Trennung ein-/ausschalten

Im Setup-Menü: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **2**

1000er-Trennung?
 1:Ein
 2:Aus

Werte speichern

gespeicherte Werte abrufen und löschen.

Zahl 13 unter A speichern, Speicher anzeigen und löschen:

1 **3** **STO** **(-)** **=**

SHIFT **STO**

SHIFT **9** **2** **=** **AC**

13→A

 13

A=13 B=0
 C=0 D=0
 E=0 F=0
 M=0 X=0
 Y=0

Zurücksetzen?
 1:Setupdaten
 2:Speicher
 3:Alle initialis.

--> Setup-Einstellungen

Einstellung der Präferenzen Bruch oder Dezimalzahl als Ergebnis

SHIFT **MENU** **1**

Option 1: Ausgabe als Zahl in math. Schreibweise

Option 2: Ausgabe als Dezimalzahl

Option 3 und 4: Eingabe ohne math. Schreibweise – nicht zu empfehlen!

1:Math --> Math
 2:Math --> Dezim.
 3:Lin. --> Linear
 4:Lin. --> Dezim.

Es kann immer zwischen den Anzeigen umgeschaltet werden mit der Taste **S+D** (Schmid - Taste)

Einstellung des Bruchergebnisses als Bruch oder gemischte Zahl.

Empfehlung: als Bruch.

SHIFT **MENU** **▼** **1**

1:ab/c
 2:d/c

Ausgabe der Zahlen mit fester Anzahl Dezimalstellen oder bei kleinen Zahlen mit Zehnerpotenzen

SHIFT **MENU** **3** **3**

1:Eingabe/Ausgabe|
 2:Winkleinheit
 3:Zahlenformat
 4:Dezimalpräfixe

1:Fix
 2:Sci
 3:Norm

1:Fix
 2:Sci
 3:Norm
 Norm:1~2 wählen

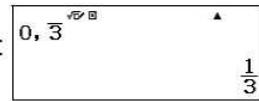
$1 \div 1000$

 1×10^{-3}

Norm 1 stellt kleine Zahlen ab 1/1000 als Zehnerpotenz dar,
Norm 2 dagegen als Dezimalzahl.



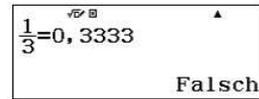
Brüche Ausgabe der Brüche siehe Setup-Einstellungen
Eingabe von Dezimalbrüchen mit Periode, z.B 1/3 als Dezimalbruch:



Vergleich von Brüchen:

Ist 1/3 = 0,3333?

Zuerst auf das Menü „Berechn. prüfen“ umstellen. Rückstellen nicht vergessen!



Daten darstellen

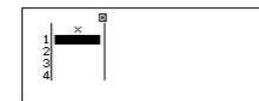
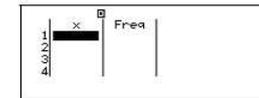
Menü Statistik wählen: **MENU** **3**

Mit Menüeintrag „1:“ Größen für 1-Variable eingeben. Die Häufigkeit kann ein-/ausgeschaltet werden.

Werte in WTR eingeben. Auswertung:

OPTN **3** **down arrow** zeigt alle statistischen Größen an.

AC führt zurück zur Eingabe/Änderung der Daten.



CALC-Funktion

Der WTR kann die Werte beliebiger Terme für Variablen A bis F berechnen. 3A – B + 1 eingeben:



Werte für die Variablen festlegen (A=4, B=6):



mit **=** kann man neue Werte für die Variablen eingeben, mit **up arrow** oder **down arrow** kann man direkt zu bestimmten Variablen wechseln.

Tabellenkalkulation für Zinssatz, Tilgung, Sparrate, Laufzeit

Es können bis zu vier Zeilen gleichzeitig dargestellt werden. Zellinhalte können kopiert oder ausgeschnitten werden. Es sind absolute oder relative Zellbezüge möglich (mit Hilfe des \$-Zeichens).

Es stehen verschiedene mathematische Berechnungsmöglichkeiten zur Verfügung.

- 1:Ausschn. & Einf.
- 2:Kopier & Einfüg
- 3:Alles löschen
- 4:Neu berechnen

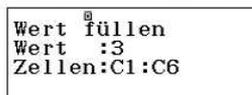
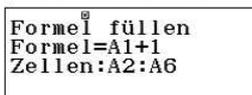
- 1:Minimum
- 2:Maximum
- 3:Mittelwert
- 4:Summe

Erläuterung am Beispiel vom Lehrbuch Klasse 7, Seite 160 Aufg. 17:

Jährliche Verzinsung von 1000 € Startguthaben mit 3%.

Eingabe der Werte für die Laufzeit in Jahren (linke Spalte), das Guthaben zum Jahresbeginn (zweite Spalte), den Zinssatz, die Zinsen pro Jahr und das Guthaben am Ende vom Jahr (letzte Spalte).

In der Berechnung der Zinsen pro Jahr wurde ein fester/absoluter Zellbezug gewählt (immer Bezug auf Zelle C1 – als C\$1 geschrieben), um den Unterschied zum relativen Zellbezug zu zeigen.



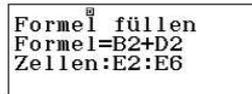
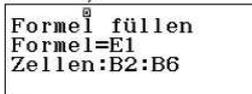
	A	B	C	D	E
1	0	1000	3	30	
2	1				
3	2				
4	3				

=B1×C\$1÷100

	B	C	D	E
1	1000	3	30	1030
2				
3				
4				

=B1+D1

Jetzt können die Formeln spaltenweise auf die anderen Zellen heruntergezogen werden (hier bis Zeile 6):



	B	C	D	E
1	1000	3	30	1030
2	1030	3	30,9	1060,9
3	1060,9	3	31,8277	1092,7
4	1092,7	3	32,7811	1125,5

=B2+D2

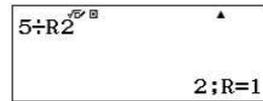
Daten auswerten

Wie in Klasse 6 Anzeige der statistischen Daten. Mit **SHIFT** **OPTN** kann man sich den Box-Plot mit Hilfe eines QR-Codes anzeigen lassen.

Berechnungen mit Rest - optional

Für die Division 5 geteilt durch 2 mit Rest muss man die Funktion ÷R benutzen.

5 **ALPHA** **÷** **2** **=**



Primfaktorzerlegung - optional

Um 1014 in Primfaktoren zu zerlegen, muss man die Zahl zuerst im WTR eingeben und dann mit FACT umwandeln:

1 **0** **1** **4** **=** **SHIFT** **FACT**

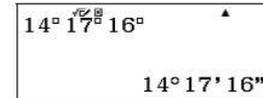


Zeitungrechnungen - optional

Eingabe einer Zeitangabe: 14:17:06 Uhr (Stunden, Minuten, Sekunden)

1 **4** **:** **1** **7** **:** **0** **6** **=**

Umwandlung in Stunden: **⇨**



Umwandlung einer Zahl in das Binärsystem - optional, vergl. Informatik Kl. 7

Umschalten des WTR in den Basis-n-Modus: **MENU** **2**

Dezimalsystem einstellen: **x²**

Eingabe einer Zahl oder Rechnung im Dezimalsystem: **1** **5** **x** **3** **7** **=**

Umwandlung in das Binärsystem: **log₂**

16.2.2 Wertetabellen von Funktionen (ab Ag 89/207)

--> Im Setup-Menü kann man festlegen, ob die Wertetabelle für eine oder zwei Funktionen angezeigt wird. **SHIFT** **MENU** **⇩** **4**

Eingabe der Wertetabelle:

MENU **6** **x** **x²** **=** **2** **x** **=**

Eingabe von Start- und Endwert incl. Schrittweite.

Man kann jetzt direkt in der Wertetabelle einzelne Argumente ändern (überschreiben). Es wird sofort der neue Funktionswert berechnet.

Mit der Taste **AC** kommt man zurück zur Eingabe der Funktionsgleichung.

Aus der Wertetabelle heraus kommt man mit **SHIFT** **OPTN** zur Anzeige des QR-Codes, den man z.B. mit einem Smartphone auslesen kann. Die Schaubilder werden angezeigt.

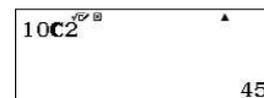


16.2.3 Berechnung von Binomialkoeffizienten (ab Ag 325/833)

--> Binomialkoeffizienten können direkt berechnet werden,

$\binom{10}{2}$ wird mit nCr im WTR eingegeben:

1 **0** **SHIFT** **÷** **2** **=**



16.2.4 Die Binomialverteilung (ab Ag 331/851)

--> Einstellung des richtigen Menü-Eintrages:

MENU **4**

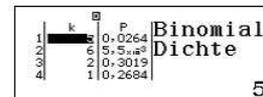
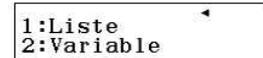
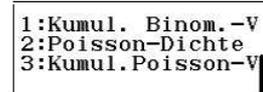
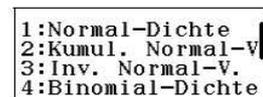
Menüpunkt **4** führt zur Binomialverteilung, geht man ins Menü der nächsten Seite, kommt man zur kumulierten Binomialverteilung.

Zur Eingabe der Werte für k, n und p geht man zu Eintrag „2:Variable“.

Es können die Werte eingegeben werden. **=** führt wieder zurück zur Eingabe neuer Werte.

Will man eine Übersicht mehrerer Werte für k und/oder p, so geht man zu „1:Liste“. Es können Werte für k eingegeben werden. **=** führt weiter zur Eingabe der Werte für n und p.

Es können die Werte für k auch direkt in der Tabelle geändert werden.



Geht man mit den Pfeiltasten auf das Ergebnis für P, kann man dieses auch z.B. unter A speichern:



k	P	Binomial Dichte
1	0,00000	
2	0,00025	
3	0,00195	
4	0,00938	
5	0,03125	
6	0,07813	
7	0,15625	
8	0,26844	
9	0,42188	
10	0,57813	
11	0,73156	
12	0,84375	
13	0,92188	
14	0,97188	
15	0,99975	

16.2.5 Testen von Hypothesen (ab Ag 341/879)

Beispiel: Die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,3$ soll mit einem Stichprobenumfang von $n = 200$ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Hier liegt ein linksseitiger Test vor. X ist die Anzahl der Treffer der Stichprobe und im Extremfall binomialverteilt mit $n=200$ und $p=0,3$.

Es muss gelten: $P(X \leq k) < 0,05$. Gesucht ist der größte Wert für k, der diese Bedingung erfüllt. Der Erwartungswert von X ist $E(X)=200 \cdot 0,3=60$, also muss k kleiner als 60 sein.

Die Wahrscheinlichkeiten sind noch zu hoch. Direkt in der Tabelle können

die Werte für k korrigiert werden. Bestätigung mit $\boxed{=}$ führt zur Eingabe von n und p. $\boxed{=}$ auch hier berechnet die Werte neu.

k	P	Kumul. Binom.-V
1	0,0505	
2	0,0695	
3	0,0934	
4	0,1227	

49

Somit ist der Ablehnungsbereich der Nullhypothese von 0 bis 48, im Bereich von 49 bis 200 kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

k	P	Kumul. Binom.-V
1	0,0249	
2	0,0359	
3	0,0505	
4	0,1227	

47

16.2.6 Binomialverteilung: n bestimmen (ab Ag 335/860)

Beispiel: Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt $\frac{1}{4}$.

Es ist zu berechnen:

$$P(X \geq 1) > 0,99 \Leftrightarrow P(X=0) < 0,01$$

P ist zu groß. Durch $\boxed{=}$ Ändern des Wertes für n. Für $n=17$ erhält man 0,0075

k	n	p	Binomial-Dichte
0		0,25	
1	15	0,25	

P=	0,01336346101
----	---------------

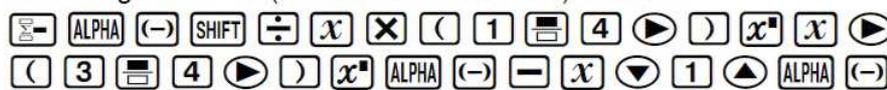
P=	7,516946818 $\times 10^{-3}$
----	------------------------------

Mit Tabellenfunktion oder CALC-Funktion kann das Problem durch folgende Formel gelöst werden: $P(X \geq 1) > 0,99$

$$\sum_{x=1}^A \binom{A}{x} p^x \cdot (1-p)^{A-x}$$

$\sum_{x=1}^A \binom{A}{x} p^x \cdot (1-p)^{A-x}$	0,986636539
---	-------------

Tastenfolge für $n=15$ (im WTR die Variable A) und $x=1$:



$\sum_{x=1}^A \binom{A}{x} p^x \cdot (1-p)^{A-x}$	0,9924830532
---	--------------



Für $n=17$ erhält man die Lösung.

Man kann die Formel auch in der Tabellenkalkulation eingeben und dann n durch Probieren bestimmen. Tabellenkalkulation einstellen: $\boxed{\text{MENU}} \boxed{5}$

	A	B	C	D
1	1	0,25		
2	2	0,4375		
3	3	0,5781		
4	4	0,6835		

=A1+1

	A	B	C	D
1	1	0,25		
2	2	0,4375		
3	3	0,5781		
4	4	0,6835		

=Σ(A1;C1x0,25^(x)×0,75^(A1-x);1;A1)

	A	B	C	D
1	9	0,9249		
2	10	0,9436		
3	11	0,9577		
4	12	0,9683		

9

	A	B	C	D
6	14	0,9821		
7	15	0,9866		
8	16	0,9899		
9	17	0,9924		

0,9924830532

16.12 Vorwort für Eltern

Wolfgang Schmid

FSG Marbach

Liebe Eltern,

sd@slt.biz

ich freue mich ihr Kind in diesem Schuljahr im Fach Mathematik unterrichten zu dürfen und möchte Ihnen im Folgenden ein paar Informationen zu meinem Unterricht geben. Mathematik ist ein Kernfach und in hohem Maße versetzungsrelevant. Um in Mathematik eine gute Note zu bekommen, sollte ihr Kind sehr viel üben und Üben bedeutet nicht das Nachvollziehen einer vorhandenen Musterlösung. Zu jeder Mathestunde in der Schule sollte Ihr Kind 45 Minuten zu Hause Aufgaben rechnen; dies darf auch in Kleingruppen geschehen. Zu diesem Zweck bekommt Ihr Kind am Anfang des Schuljahres einen Auszug meines Buches *Hurra Mathematik* mit vielen Übungsaufgaben und zugehörigen Ergebnissen / Lösungsvorschlägen.

Meine Stoffverteilungspläne und mein Unterrichtsbuch finden Sie im Internet auf sd.slt.biz Auf dieser Seite finden Sie auch alte Manuskripte zum Nachlernen, Klassenarbeitstermine und andere nützliche Informationen. Der Username ist Schueler, das Passwort wird im Unterricht bekanntgegeben.

Im Unterricht wird der Unterrichtsstoff normalerweise anhand von zielführenden Fragestellungen erarbeitet (entdeckendes Lernen). *Hurra Mathematik* stellt (in den Überschriften) einen Bezug zu den eingeführten Lehrwerken her. Hausaufgaben sind grundsätzlich alle Aufgaben (aus *Hurra Mathematik*), die im Unterricht ausgelassen wurden. Bei allen Übungsaufgaben (Türmchenaufgaben) gilt folgende Faustregel: Wer auf Note '1' steht, macht eine, wer auf Note '2' steht macht zwei usw. Der Schwierigkeitsgrad der Übungsaufgaben ist ansteigend, so wird Binnendifferenzierung gewährleistet. Grundsätzlich werden die Hausaufgaben im Unterricht nur auf Anfrage besprochen; die umrahmten Hausaufgaben werden (maximal) ein Mal pro Woche kontrolliert.

Damit sich Ihr Kind regelmäßig mit Mathematik beschäftigt, schreibe ich jedes Halbjahr etwa 2 Klassenarbeiten und 1 bis 3 Tests (in der Regel angesagt). Bei schlechter Arbeitshaltung der Klasse behalte ich mir jedoch vor, die Tests nicht mehr anzusetzen. Jede Klassenarbeit zählt wie zwei Tests.

Hinzu kommt eine mündliche Note, die ich ebenfalls jeweils wie einen Test werte. Die mündliche Note kann durch Sonderleistungen (in der Regel Vorträge) aufgewertet werden. Sollte sich Ihr Kind dafür entscheiden, bei mir eine GFS zu machen, dann muss es bei mir eine Schulstunde zu einem noch nicht behandelten mathematischen Thema durchführen. Wenn die Zeugnisnote 'ausreichend' angestrebt wird, ohne dass eine Klassenarbeit mit 'ausreichend' oder besser erreicht wurde, gehört zur GFS auch eine mündliche Prüfung, die zu 50% in die Gesamtnote einfließt. Informationen zur GFS finden Sie auf meiner Internetseite.

Nach diesen vielen Informationen freue ich mich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit, denn Mathematik macht Spaß.

Freundliche Grüße,

W. Schmid